Сцэнарый праекта “Жывая трыганаметрыя” (фрагмент)

ЛІКАВАЯ АКРУЖЫНА (ГРАДУСЫ І РАДЫЯНЫ)

Зойдзем на каардынатную плоскасць.

На маніторы – плоскасць, падзеленая на квадрацікі старанай па сантыметру, з выдзеленымі восямі абсцыс і ардынат.

Змесцім на гэтай плоскасці акружыну радыусам 1 з цэнтрам у пачатку каардынат.

На экране з’яўляецца акружына, умежаная ў квадрат з чатырох клетак, бліжэйшых да пачатку каардынат.

Раўнанне такой акружыны: $y^2 + x^2 = 1$.

Раўнанне з’яўляецца на экране ў левым ніжнім кутку.

Прыгледзімся да гэтай акружыны.

Акружына і квадрацікі плоскасці пачынаюць павялічвацца і калі акружына займе крыху больш за палову экрана, яе рост спыняецца і квадрацікі знікаюць. Раўнанне застаецца ў тым жа фармаце.

Зробім гэтую акружыну лікавай або каардынатнай акружынай. Для гэтага трэба выбраць на ёй пачатковы пункт, адзінкавую дугу і паказаць дадатны кірунак руху. Пачатковым або нулявым пунктам акружыны будзем лічыць пункт перасячэння акружыны з дадатным кірункам восі абсцыс.

Названы пункт высвечваецца чырвоным і спачатку пульсуе, потым пульсацыя знікае.

Дадатным кірункам руху па акружыне будзем лічыць рух супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі.

Выдзелены пункт бяжыць па акружыне, пакідаючы чырванаваты след, які знікае з пачаткам наступнага сказу.

Тады адмоўным кірункам руху прыдзецца лічыць рух пункта па ходу гадзіннікавай стрэлкі.

Пачатковы пункт акружыны набывае сіні колер і бяжыць па акружыне ў адмоўным кірунку, пакідаючы сіняваты след. След знікае з пачаткам наступнага сказу.

Адзінкавай дугой напачатку будзем лічыць малесенькую дугу ў адзін градус або адну трохсотшасцідзесятую долю акружыны.

Выдзяляецца чырвоным названая дуга, яна спачатку пульсуе, потым пульсацыя знікае. Акружына падзяляецца тоненькімі штрышкамі на 360 частак.

Такім чынам, акружына змяшчае 360 такіх адзінак. Няхай пункт бяжыць па акружыне. Вазьміце яго курсорам і рухайце па акружыне.

Пункт пры дапамозе курсора перамяшчаецца па акружыне ў адзін ці другі бок. Побач з пунктам рухаецца лік, які паказвае ў градусах пройдзеную дугу.

Няхай пункт перамяшчаецца ў дадатным кірунку ад нулявога пункта. Заўважайце лікі, якія атрымліваюцца на перасячэнні з восямі. 90 градусаў. Гэта пункт мінуў першую чвэрць акружыны і зараз пераходзіць у другую. Рухаем далей. 180 градусаў – закончылася другая чвэрць. 270 градусаў – закончылася трэцяя чвэрць. 360 градусаў – закончылася чацвёртая чвэрць. Але не спыняемся, рухаем пункт далей. 400, 450, 500, 540 градусаў... 720 градусаў, 1000 градусаў... Так урэшце можна дайсці і да мільёна градусаў або да мінус мільёна, калі рухацца ў адваротным кірунку. Лікі, якія паказваюць становішча пункта на акружыне, будзем называць каардынатамі пункта на акружыне і абазначаць грэцкай літарай φ (або якой-небудзь іншай літарай часцей з грэцкага алфавіту, як даніна павагі да грэкаў, якія гэта ўсё распачалі).

Перад лікам, які суправаджае пункт на акружыне, з’яўляецца дадатак “φ =”.

Паколькі лік φ паказвае велічыню пройдзенай пунктам дугі ад пачатковага (нулявога) становішча, натуральна назваць такі лік дугантай пункта, каб адрозніваць гэтую каардынату ад каардынат на плоскасці (абсцысы і ардынаты).

Адзначым, што лікавая акружына ў адрозненне ад лікавай прамой не бясконцая, яна мае пэўную даўжыню. І калі пункт прабяжыць усю акружыну і рухаецца далей, ён праходзіць тыя ж пункты, але адпаведны лік цяпер іншы. Такім чынам, адзін пункт акружыны мае не адну, а бясконцае мноства каардынат, якія адрозніваюцца паміж сабой на меру акружыны, у нашым выпадку на 360 градусаў. Калі пункт мае дуганту, да прыкладу, 30 градусаў, то гэтаму пункту адпавядаюць таксама дуганты 390 градусаў (30 + 360), 750 градусаў (30 + 2$\times$360) і гэтак далей. Усе гэтыя лікі можна абагульніць формулай $30^o + 360^o \times n$, дзе n – любы цэлы лік. Такой формулай запісваюцца лікі, якія пры дзяленні на 360 даюць астачу 30. Такой жа формулай запісваюцца члены арыфметычнай прагрэсіі з рознасцю 360. І так з любым лікам. Калі пункт мае на акружыне дуганту β, то ўсе дуганты гэтага пункта запішуцца формулай $\varphi = \beta + 360^o \times k$, дзе k – любы цэлы лік. Парухайце пункт па акружыне...

Цяпер да ліку, які суправаджае пункт на акружыне, дадаецца “$+360^o\, n,\ n$ÎZ”.

Як знайсці на акружыне пункт з дадзенай дугантай (напрыклад, 11840^o)? Дастаткова вызначыць астачу, якая атрымаецца пры дзяленні гэтага ліку на 360.

На экране з’яўляецца запіс: 11840 : 360 = 32 (аст.320)

З гэтага запісу бачна, што, каб дабрацца да пункта з дугантай 11840^o, пачатковы пункт павінен прайсці 32 поўныя акружыны і няпоўную 33-ю. 32 поўныя акружыны нас могуць не цікавіць, бо яны заканчваюцца ў тым жа пачатковым пункце. Нас цікавіць апошняя няпоўная акружына: 320^o. Пункт з такой дугантай знайсці ўжо нескладана. Гэта й будзе пункт з дугантай 11840^o. А дзе знаходзіцца пункт з дугантай -11840^o? Так, ён сіметрычны першаму пункту адносна восі абсцыс.

Вы павінны навучыцца знаходзіць пункт акружыны па любой зададзенай яго дуганце ў градусах. Патрэніруйцеся ў гэтым на паперы: намалюйце больш-менш прыглядную акпружыну і адзначце на ёй пункты з дугантамі 47088^o, 512455^o, -17000^o... Пішыце далей любыя лікі і знаходзьце адпаведеныя пункты да таго часу, пакуль не скажаце сабе: усё, я гэта магу рабіць упэўнена.

Але часцей у якасці адзінкавай дугі выбіраюць не дугу ў градус, а дугу, па даўжыні роўную радыусу акружыны. Радыус, нагадаем, роўны 1, таму натуральна выбраць за адзінку і дугу той жа даўжыні. ***Дугу любой акружыны, па даўжыні роўную радыусу, называюць радыянам.***

На акружыне высвечваецца чырвоным дуга ў адзін радыян (спачатку пульсуе).

Радыянам называюць і адпаведны гэтай дузе цэнтральны вугал.

На акружыне высвечваецца цэнтральны вугал у адзін радыян (з пачаткам наступнага сказу знікае).

Колькі радыянаў змяшчае адна акружына? Калі ўспомніць, што даўжыня акружыны вылічваецца множаннем радыуса на лік 2*π*, то й атрымаем, што акружына змяшчае 2*π* радыянаў. Такім чынам, суадносіну паміж радыянам і градусам выяўляе роўнасць: 2*π* радыянаў = 360^o.

У левым верхнім кутку экрана з'яўляецца роўнасць 2π = 360^o.

Слова "радыян" звычайна не пішуць, яно падразумоўваецца, калі не ўказаны знак градуса. Гэта такая ж умоўнасць, як ненапісаны знак множання ў выразе *xy* ці ненапісаны паказнік квадратнага кораня.

Падзелім абедзве часткі гэтай роўнасці на 2.

Папярэдняя роўнасць замяняецца на іншую: π = 180^o.

Такім чынам, 1 радыян роўны $\frac{180^o}{p}$**,**

Ніжэй папярэдняй роўнасці з'яўляецца: $1 = \frac{180^o}{p}$ *» 57^o.*

або 1^o = $\frac{p}{180}$**.**

Гэтая роўнасць паказваецца побач з папярэдняй. Абедзве выдзяляюцца рамкамі: $\boxed{1 = \frac{180^o}{p}}$ $\boxed{1^o = \frac{p}{180}}$

Каб знайсці на акружыне пункт з дугантай, напрыклад, 78 радыянаў, можна перавесці гэтую велічыню ў градусы множаннем на $\frac{180^o}{p}$**, дзе π = 3,14159... і далей выконваць дзеянні так, як паказана раней для градусаў.**

Вылічэнні паказваюцца і знікаюць з пачаткам наступнага сказу:

$\frac{78 \cdot 180^o}{3{,}14159}$ *» 4469^o, 4469 : 360 = 12 (аст.149).*

Такім чынам, пункт з дугантай 78 радыянаў будзе прыблізна там, дзе пункт з дугантай 149 градусаў.

Пры вылічэннях з вялікімі лікамі на калькулятары лічбаў ліку *π* трэба браць не менш, чым іх у зададзеным ліку, інакш атрымаецца вялікая хібнасць. Калі, нап-

рыклад, трэба знайсці пункт з дугантай 51 308, то ў ліку π трэба браць не менш як 5 лічбаў.

Можна рабіць вылічэнні ў радыянах. Дадзены лік трэба падзяліць на 2π (бо 2π – радыянная мера акружыны)...

Вылічэнні паказваюцца на экране і знікаюць пасля таго, як пункт адлюструецца на акружыне.

51 308 : (2x3,14159) » 8165,93...

Атрыманы лік паказвае, што для знаходжання шуканага пункта трэба адлічыць 8165 цэлых акружын (іх, канешне ж, лічыць не трэба, бо кожная заканчваецца там, дзе й пачалася) і частку (0,93) 8166-й. Вось гэтая частка і павінна найперш цікавіць шукальніка. Яе ўсё ж лепей перавесці ў градусы:

0,93x360^o » 335^o.

Такім чынам, пункт з дугантай 51 308 радыянаў знаходзіцца прыблізна там, дзе пункт з дугантай 335 градусаў.

Знойдзены пункт пульсуе на акружыне, вылічэнні знікаюць. З пачаткам наступнага сказу знікае й пункт.

Вам трэба навучыцца знаходўзіць пункт акружыны па яго дуганце ў радыянах. Патрэніруйце сябе ў гэтым.

У левым верхнім кутку экрана з'яўляецца запіс А(   )

Напішыце ў дужках любы лік радыянаў і, выканаўшы патрэбныя вылічэнні, знайдзіце адпаведны пункт акружыны, адзначце яго курсорам. Калі пункт будзе паказаны правільна (дапушчальная памылка не болей за 5^o), ён высветліцца чырвоным і запульсуе. Калі ж няправільна, каля яго з'явіцца слова НЕ.

Выконвайце гэтае практыкаванне, пакуль не з'явіцца ўпэўненасць, што вы гэта можаце рабіць бездакорна.

Гэта называецца "навучыцца чытаць акружыну".

Калі навучыліся, можна пераходзіць да наступнага раздзела.

СІНУС І АРКСІНУС

Акружыну радыуса 1 з цэнтрам у пачатку каардынатнай плоскасці называюць трыганаметрычнай акружынай (сэнс такой назвы зразумееце крыху пазней). Вы навучыліся чытаць трыганаметрычную акружыну, гэта значыць – знаходзіць пункт акружыны па названай яго дуганце φ на акружыне і вызначаць дуганту дадзенага на акружыне пункта. Няхай пункт рухаецца па трыганаметрычнай акружыне.

Пункт павольна перамяшчаецца па акружыне.

Пры гэтым яго дуганта φ на акружыне змяняецца.

У надпісе каля пункта "φ = ... + 2πn, n Î Z" першы складнік высвечваецца чырвоным і змяняецца адпаведна перамяшчэнню пункта па акружыне.

Але ж акружына змешчана на каардынатнай плоскасці і пункт мае плоскія каардынаты (x; y).

З пункта, які працягвае павольны рух, апускаюцца перпендыкуляры на восі каардынат, высвечваюцца адпаведныя лікі на восях.

Яны таксама змяняюцца. І гэтыя змяненні ўзаемазвязаныя. Прасочым спачатку за суадносінай паміж *φ* і *y*.

Перпендыкуляр да восі абсцыс і сама вось абсцыс знікаюць (можна так: вось абсцыс застаецца, але цьмяная).

Паколькі кожны лік *φ* вызначае пэўны пункт акружыны і любы пункт акружыны мае нейкую (прычым адзіную) ардынату на каардынатнай плоскасці, то атрымліваем, што кожнаму ліку *φ* адпавядае адзіны лік *y*. Такім чынам, адпаведнасць паміж *φ* і *y* ёсць функцыя. Старажытныя грэкі назвалі такую функцыю сінусам. *Сінусам ліку φ называюць ардынату пункта трыганаметрычнай акружыны з дугантай φ*. Абазначаецца: *sin φ*.

Вызначым уласцівасці, якімі валодае гэтая функцыя *y* = *sin φ*.

Паколькі для любога *φ* існуе адпаведны *y*, то абсягам вызначэння функцыі ёсць мноства ўсіх рэчаісных лікаў (ці нейкае яго падмноства, калі гэта асобна агаворана).

Абсяг значэнняў функцыі: [-1; 1], бо толькі ў пункты гэтага прамежку апускаюцца перпендыкуляры з пунктаў акружыны.

Адпаведны адрэзак восі ардынат высвечваецца і спачатку пульсуе.

Гэты адрэзак восі ардынат называюць лініяй сінусаў.

Бачна, што найбольшага значэння *y* = 1 функцыя дасягае ў верхнім пункце акружыны: *φ* = $\frac{p}{2}+2p\,k$, дзе *k* – любы цэлы лік. А найменшага значэння *y* = -1 функцыя дасягае ў ніжнім пункце акружыны: *φ* = $-\frac{p}{2}+2p\,n$, дзе *n* – любы цэлы лік.

***Sin* 0 = 0, *sin π* = 0… Таму функцыя мае нулі. Іх мноства бясконцае. Яны паўтараюцца праз кожныя паўакружыны. *y* = 0 пры *φ* = *πm*, *m* Î Z.**

Пункты о і π па чарзе пульсуюць.

Дадатныя значэнні функцыя прымае на верхняй дузе трыганаметрычнай акружыны, гэта значыць у першай і другой яе чвэрцях.

Адпаведная дуга і адпаведная частка лініі сінусаў высвечваюцца і пульсуюць.

Адмоўныя значэнні функцыя прымае на ніжняй палове акружыны – у трэцяй і чацвёртай яе чвэрцях.

Адпаведная дуга і адпаведная частка лініі сінусаў высвечваюцца і пульсуюць.

Вызначымся з манатоннасцю функцыі. Пры дадатным кірунку руху пункта па правай дузе трыганаметрычнай акружыны (г.зн. па чацвёртай і першай яе чвэрцях) функцыя нарастае ад -1 да 1. Гавораць так: функцыя *y* = *sin φ* нарастае на прамежках $[-\frac{p}{2}+2p\,n;\frac{p}{2}+2p\,n]$, дзе *n* – любы цэлы лік.

Яркі пункт з апушчаным перпендыкулярам да восі ардынат павольна перамяшчаецца па гэтай дузе.

Пры дадатным кірунку руху пункта па левай дузе трыганаметрычнай акружыны (г.зн. па другой і трэцяй яе чвэрцях) функцыя спадае ад 1 да -1. Гавораць так: функцыя *y* = *sin φ* спадае на прамежках $[\frac{p}{2}+2p\,n;\frac{3p}{2}+2p\,n]$**, дзе *n* – любы цэлы лік.**

Адпаведны рух пункта.

Для супрацьлеглых значэнняў *φ* адпаведныя значэнні функцыі таксама супрацьлеглыя.

Два пункты сіметрычна рухацца ад нуля акружыны ў супрацьлеглыя бакі, чырвоны пункт у дадатным кірунку , сіні – у адмоўным. Перпендыкулярамі паказваюцца іх сінусы, гэтыя пункты адпаведнага колеру рухаюцца па лініі сінусаў.

Sin **(-*φ*) = *sin φ* – гэтая роўнасць праўдзіцца для любых *φ*. Таму функцыя *y* = *sin φ* няцотная.**

Калі дадаць да аргумента адзін або некалькі разоў лік 2*π* (радыянную меру акружыны), то пункт акружыны не зменіцца і яго сінус будзе тым жа. *Sin* (*φ*+2*πk*) = *sin φ* для любых цэлых *k*. Гэтая роўнасць азначае, што сінус – функцыя перыядычная, што любы з лікаў 2*πk* з'яўляецца яе перыядам, а найменшы дадатны з іх роўны 2*π*.

Для пунктаў з дугантамі 0, $\frac{p}{2}$**, *π*,** $\frac{3p}{2}$ **вы ведаеце дакладныя значэнні сінуса**

Запісы на маніторы: $sin\,\frac{p}{2}$ = 1

$sin\,\pi = 0$ $\qquad$ $sin\,0 = 0$

$sin\,\frac{3p}{2}$ = -1

Ёсць яшчэ некалькі пунктаў на акружыне, сінусы якіх вы павінны ведаць дакладна. Гэта тыя пункты, якія падзяляюць кожную чвэрць папалам,

Чатыры пункты пульсуюць

і тыя, якія падзяляюць кожную чвэрць акружыны на тры роўныя часткі

Яшчэ 8 пунктаў пульсуюць

Гэта пункты з асноўнымі дугантамі ў градусах: 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°,

Адпаведныя лікі з'яўляюцца каля называных пунктаў, потым гэтыя запісы знікаюць. Застануцца запісы ў радыянах.

або ў радыянах: $\frac{p}{6}, \frac{p}{4}, \frac{p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{3p}{4}, \frac{5p}{6}, \frac{7p}{6}, \frac{5p}{4}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}, \frac{7p}{4}, \frac{11p}{6}.$

Па чатыры пункты з назоўнікам 6, з назоўнікам 4 і з назоўнікам 3. Злучым пункты з назоўнікам 6 адрэзкамі

З'яўляецца прамавугольнік

Атрымаўся прамавугольнік, які перасякае лінію сінусаў у двух пунктах. Правядзем радыус да пункта з дугантай $\frac{p}{6}$. Вы бачыце прамавугольны трохвугольнік з вуглом 30^o.

Трохвугольнік высвечваецца.

Гіпатэнуза гэтага трохвугольніка роўна 1, бо гэта радыус акружыны, а катэт насупраць вугла ў 30^o роўны палавіне гіпатэнузы.

Катэт высвечваецца і з пульсацыяй паралельна пераносіцца на вось ардынат, дўзе некаторы час пульсуе.

Такім чынам, атрымана, што $sin\frac{p}{6} = \frac{1}{2}$ і $sin\frac{5p}{6} = \frac{1}{2}$.

Паглядзіце на іншыя вяршыні гэтага прамавугольніка. Няцяжка здагадацца, што $sin\frac{7p}{6} = -\frac{1}{2}$ і $sin\frac{11p}{6} = -\frac{1}{2}$. Тут лепш сказаць так: $sin(-\frac{p}{6}) = -\frac{1}{2}$ і $sin(-\frac{5p}{6}) = -\frac{1}{2}$.

І вы атрымалі дакладныя значэнні сінуса для чатырох вяршынь гэтага прамавугольніка.

Зараз злучым адрэзкамі пункты з назоўнікам 3. Атрымаецца гэткі ж прамавугольнік, павернуты вакол яго цэнтра на 90^o. Сінус адпаведнага пункта акружыны ($\frac{p}{3}$ або $\frac{2p}{3}$) паказвае цяпер другі катэт прамавугольніка трохвугольніка.

Трохвугольнік высвечваецца.

Яго даўжыню можна вылічыць па тэарэме Піфагора.

Запісы: $sin\frac{p}{3} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

І вы ведаеце дакладныя значэнні сінусаў яшчэ чатырох пунктаў акружыны

$$sin\frac{p}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\frac{2p}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\frac{4p}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\frac{5p}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(або $sin(-\frac{p}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$*)*

Засталося злучыць адрэзкамі пункты з назоўнікам 4. Атрымаецца квадрат з дыяганаллю ў дзве адзінкі. Старану такога квадрата можна разлічыць з дапамогай тэарэмы Піфагора, яна роўна $\sqrt{2}$. Палавінка гэтай стараны і паказвае велічыні сінусаў адпаведных пунктаў акружыны. Такім чынам, яшчэ 4 пункты акружыны набылі дакладныя значэнні сінусаў

$sin\frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\frac{3p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\frac{5p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\frac{7p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(апошняе лепш так:* $sin(-\frac{p}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$*)*

Усяго, такім чынам, маецца 16 пунктаў акружыны, сінусы якіх вы павінны ведаць дакладна. Сінусы астатніх пунктаў будзеце знаходзіць прыблiжана, як паказана раней.

Зараз можна паглядзець, як выглядае графік функцыі $y = \sin x$.

Уявіце сабе, што на акружыну намотана, як нітка, прамая φ. І зараз мы гэтую нітку разматаем, выцягнуўшы зноў у прамую і размясціўшы на месцы восі абсцыс. Вось ардынат пакінем на месцы. У атрыманай сістэме каардынат $y\varphi$ пабудуем графік функцыі $y = \sin \varphi$.

Выява акружыны памяншаецца і адсоўваецца ўлева. Справа ад яе размяшчаецца новая сістэма каардынат з шкалой на восі φ праз π. Пункт рухаецца па акружыне ад нулявога яе пункта спачатку ў дадатным, затым у адмоўным кірунку; адпаведны пункт рухаецца па новай каардынатнай плоскасці, пакідаючы след – графік. Далей паказваюцца змяненні графіка: $y = A\sin \varphi$, $y = \sin B\varphi$, $y = \sin (\varphi + m)$, $y = \sin \varphi + n$*... Паступова ўсё зводзіцца да абагульненага* $y = A\sin B(\varphi + m) + n$. *Вучні маюць магчымасць паэксперыментаваць з графікам і з раўнаннем функцыі.*

У далейшым вось абсцыс мы будзем абазначаць традыцыйнай літарай x.

Разгледзім адваротную задачу: сінус якога ліку роўны, напрыклад, адной другой?

На маніторы зноў акружына

Для адказу на гэтае пытанне трэба знайсці на лініі сінусаў лік адна другая і, правёўшы праз гэты пункт перпендыкуляр да лініі сінусаў, вызначыць, у якіх пунктах гэты перпендыкуляр перасякае акружыну.

Усё гэта адпаведна паказваецца на маніторы.

Бачым, што пунктаў перасячэння перпендыкуляра з акружынай два і кожны з іх мае бясконцае мноства дугантаў на акружыне. Такім чынам, раўнанне $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ мае бясконцае мноства развязкаў: $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ (каардынаты правага пункта)

Правы пункт пульсуе. Каля яго надпіс: $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

або $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ (каардынаты левага пункта), n і k – любыя цэлыя лікі.

Пульсуе левы пункт з надпісам $\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

Каб разгледзець функцыю, адваротную сінусу (назавем такую функцыю арксінусам), успомніўшы аб тым, што функцыя павінна мець адзінае значэнне для кожнага значэння аргумента, трэба вызначыцца, які з гэтай бясконцай колькасці лікаў браць у якасці арксінуса ліку $\frac{1}{2}$. Натуральна, што такі выбар павінен атрымацца ў выніку дамовы паміж матэматыкамі. Гэтак жа натуральна, што матэматыкі ў такім выбары аддаюць перавагу лікам, бліжэйшым да нуля, гэта значыць лікам, меншым па модулі. Падзякуем ім за гэта, бо інакш нашы разлікі былі б больш складанымі.

Але вернемся да сітуацыі з пастаўленай задачай. Няцяжка здагадацца, што, выбіраючы паміж левым і правым пунктамі акружыны тут будзе выбраны правы пункт як бліжэйшы да нулявога пункта акружыны.

Левая дуга і левы прамень восі абсцыс знікаюць.

І няцяжка здагадацца, што з мноства каардынат гэтага пункта будзе выбраны лік $\frac{p}{6}$ без дадавання перыядаў 2*π*. Такім чынам, арксінус ліку $\frac{1}{2}$ роўны $\frac{p}{6}$.

Надпіс "+2πk" таксама знікае.

Пачніце змяняць лік $\frac{1}{2}$ і прасачыце за змяненнем арксінуса.

Пункт курсорам перасоўваецца па лініі сінусаў. Разам з ім рухаецца перпендыкуляр да правай дугі. Абодва канцы гэтага перпендыкуляра высвечваюцца і каля іх бягуць адпаведныя лікі. Пры пераходзе ніжэй за нуль пункты змяняюць колер з чырвонага на сіні. Далей усё адбываецца адпаведна тэксту.

Бачна, што для лікаў, па модулі большых за 1, арксінусаў не існуе, бо лінія сінусаў займае прамежак ад -1 да 1. Для лікаў жа, па модулі меншых за 1 або роўных адзінцы, арксінус атрымліваецца з прамежку $[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}]$ (чацвёртая і першая чвэрці акружыны). Абагульнім усё сказанае азначэннем: Арксінусам ліку *a* з прамежку [-1; 1] называюць такі лік *b* з прамежку $[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}]$, сінус якога роўны *a*.

Запіс *arcsin a = b* раўназначны запісу *sin b = a* пры ўмове адпаведнасці лікаў *a* і *b* названым прамежкам.

На маніторы запіс: ***arcsin a = b*** Û ***sin b = a*** *для* $a\in[-1;1]$, $b\in[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}]$

Патрэніруйцеся ў вызначэнні арксінуса дадзенага ліку. Знайдзіце, напрыклад, прыблізныя значэнні лікаў *arcsin* 0,9; *arcsin* 0,6; *arcsin* 0,2; *arcsin* 0,1; *arcsin* 0,02; *arcsin* (-0,1); *arcsin* (-0,9)...

Вучань перасоўвае курсорам пункт па лініі сінусаў і па перпендыкуляры бачыць на лініі арксінусаў адпаведны пункт з падпісаным значэннем.

Для дзевяці лікаў ±1, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$ і 0 вы павінны ведаць дакладныя значэнні арксінуса:

$$arcsin\ (-1) = -\frac{p}{2},\ arcsin\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{p}{3},\ arcsin\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{p}{4},..$$

Засваенне аперацыі знаходжання арксінуса як адваротнай для знаходжання сінуса дазваляе развязваць раўнанні кшталту *sin x = a*, дзе *a* – нейкі лік. Зразумела, што пры *a* > 1 або *a* < -1 раўнанне не будзе мець каранёў. Калі *a* = 1, то на акружыне маецца адзіны пункт, сінус якога роўны адзінцы. Яго дуганты запісваюцца форму-

лай $\frac{p}{2}+2\pi k$, дзе k – любы цэлы лік. Такім чынам, раўнанне $sin\ x = 1$ мае корані $x = \frac{p}{2}+2\pi k$, k Î Z.

Паралельна тэксту з’ява паказваецца на маніторы.

Калі $a = -1$, то на акружыне маецца адзіны пункт, сінус якога роўны мінус адзінцы. Яго дуганты запісваюцца формулай $-\frac{p}{2}+2\pi k$, дзе k – любы цэлы лік. Такім чынам, раўнанне $sin\ x = -1$ мае корані $x = -\frac{p}{2}+2\pi k$, k Î Z.

Калі $a = 0$, то на акружыне знойдзецца два пункты, сінусы якіх роўны нулю. Іх дуганты запісваюцца формулай πk, дзе k – любы цэлы лік. Такім чынам, раўнанне $sin\ x = 0$ мае корані $x = \pi k$, k Î Z.

Калі ж a – іншы лік з прамежку [-1; 1], то на акружыне ёсць два пункты з такімі сінусамі

Ад пункта a на лініі сінусаў дзве перпендыкулярныя ёй стрэлачкі паказваюць адпаведныя пункты.

Адзін з іх на правай дузе трыганаметрычнай акружыны, на лініі арксінусаў, таму яго дуганты $arcsin\ a + 2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік. Другі – на левай дузе. Яго можна атрымаць, калі да пункта, супрацьлеглага $arcsin\ a$,

Гэты пункт паказваецца

дадаць паўакружыны. Таму дуганты гэтага пункта можна запісаць формулай $-arcsin\ a + \pi + 2\pi m$, дзе m – любы цэлы лік. З гэтага вынікае, што раўнанне $sin\ x = a$ мае корані $x = arcsin\ a + 2\pi n$ або $x = -arcsin\ a + \pi + 2\pi m$, дзе m і n – любыя цэлыя лікі. Паспрабуем запісаць гэтыя корані адной формулай. Для гэтага крыху пераўтворым другую роўнасць: $x = = -arcsin\ a + (1 + 2m)\pi$. Цяпер прыгледзімся да абедзвюх роўнасцяў. У першай з іх лік π памнажаецца на $2n$, гэта значыць на цотны цэлы лік, у другой – на $(1+2m)$, гэта значыць на няцотны цэлы лік. Такім чынам, лік π можа памнажацца на любы цэлы лік. Але! – Калі гэты лік няцотны, то перад арксінусам стаіць мінус, а калі цотны, то – плюс. Множнік, які змяняе знак у залежнасці ад цотнасці нейкага ліку k можна запісаць так: $(-1)^k$. Тады канчаткова можна зазначыць так: раўнанне $sin\ x = a$, дзе $|a|$ £ 1, мае корані $x = (-1)^k\ arcsin\ a + \pi k$, k Î Z. Па гэтай формуле можна развязваць раўнанні для любых a з прамежку [-1; 1]. Але для выпадкаў $a = -1$, $a = 1$ або $a = 0$ лепш абыходзіцца без яе.

На графіку развязванне гэтага раўнання выглядае так. Пабудуем графікі функцый $y = sin\ x$ (сінусоіда) і $y = a$ (прамая, паралельная восі абсцыс, якая перасякае вось ардынат у пункце a). Зразумела, што пры $a > 1$ або $a < -1$ графікі не перасякуцца і таму раўнанне не мае развязкаў. Калі $a = 1$ (пасуньце прамую ў адпаведнае становішча), то графікі перасякаюцца ў верхніх пунктах сінусоіды, дзе $x = \frac{p}{2}+2\pi k$, k Î Z. Калі $a = -1$ (пасуньце прамую ў адпаведнае становішча), то графікі перасякаюцца ў ніжніх пунктах сінусоіды, дзе $x = -\frac{p}{2}+2\pi k$, k Î Z. Калі $a = 0$, то прамая супадае з воссю абсцыс, якая перасякае сінусоіду праз кожныя паўперыяда, дзе $x = \pi k$, k Î Z. Калі ж a – любы іншы лік з прамежку [-1; 1], то прамая перасякае сінусоіду па 2 разы на кожным прамежку даўжынёй 2π, па 2 разы на кожным перыядзе. Адзін з гэтых пунктаў

перасячэння абавязкова будзе на прамежку $[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}]$. Пераканайцеся ў гэтым, змяняючы *a*, гэта значыць перасоўваючы прамую. Гэты пункт мае ардынату *a* і абсцысу *arcsin a*. Другі пункт будзе на прамежку $[\frac{p}{2};\frac{3p}{2}]$. Таксама можаце пераканацца. З сіметрыі сінусоіды адносна прамой *x* = $\frac{p}{2}$ атрымаем, што абсцысы гэтых двух пунктаў сіметрычныя адносна $\frac{p}{2}$, таму аднолькава аддаленыя ад нуля і ад *π*. Змяняйце *a*.

Адпаведныя адрэзкі высвечваюцца і змяняюць даўжыні пры змяненні a, г.зн. пры перасоўванні прамой.

Таму гэты пункт мае абсцысу *π – arcsin a*. Такім чынам, раўнанне *sin x = a* для |*a*|£1 мае развязкі *arcsin a* + 2*πn* або *π – arcsin a* + 2*πm*, якія можна запісаць адной формулай *x* = (-1)^k *arcsin a* + *πk*, *k* Î Z. Пашукайце адпаведныя пункты на малюнку. Надавайце зменнай *k* любыя цэлыя значэнні: 0, 1, -1, 2, -2, 3 і г. д.

На маніторы ніжэй запісу x = (-1)^k arcsin a + πk, k Î Z з'яўляецца запіс k = . Вучні ўстаўляюць у пазначанае месца цэлы лік і на сінусоідзе высвечваецца адпаведны пункт, адпаведны пункт высвечваецца на восі абсцыс і падпісваецца: arcsin a, -arcsin a + π, -arcsin a – π і г.д. Калі хтосьці дзеля эксперыменту ўпіша лік не цэлы, то побач з'яўляецца слова "памылка". Для вялікіх лікаў k (хтосьці паспрабуе паэксперыментаваць і так) малюнак адпаведна памяншаецца, каб можна было паказаць пункт.

Для развязвання няроўнасцяў кшталту *sin x* < *a* (*sin x* £ *a*, *sin x* > *a*, *sin x* ³ *a*) трэба зноў жа пабудаваць два адпаведныя графікі і вызначыць прамежкі, дзе сінусоіда ніжэй (або вышэй) за прамую *y* = а. Пры |*a*| £ 1 такіх прамежкаў будзе бясконца многа, але іх адпаведныя канцы адрозніваюцца на велічыню перыяду.

Паглядзім на канкрэтных прыкладах, як развязваюцца такія няроўнасці.

Кожны раз адпаведная сітуацыя дэманструецца на акружыне і на графіку.

***sin x* < 4. *sin x* £ 4. Паколькі ўся сінусоіда ніжэй за прамую *y* = 4, то развязак любой з гэтых няроўнасцяў утрымлівае ўсе рэчаісныя лікі.**

sin x > 4. sin x ³ 4. У гэтых няроўнасцяў развязак пусты.

(Далей дэманструюцца развязкі кожнай з чатырох няроўнасцяў *sin x* < а, *sin x* £ *a*, *sin x* > *a*, *sin x* ³ *a* для *a* = 1, -1, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$ з наступным абагульненнем для ўсіх *a*, дзе |*a*| < 1.)

Аналагічна – у даволі блізкіх тэкставым і графічным варыянтах – падаецца раздзел

"К О С І Н У С І А Р К К О С І Н У С"